

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**APLICAÇÃO DE PROCESSAMENTO QUÂNTICO
PARA ACELERAÇÃO DA RESOLUÇÃO
DE AUTÔMATOS PROBABILÍSTICOS**

Iúri de Oliveira Parada

Brasília, Junho de 2019



**ENGENHARIA
MECATRÔNICA**
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**APLICAÇÃO DE PROCESSAMENTO QUÂNTICO
PARA ACELERAÇÃO DA RESOLUÇÃO
DE AUTÔMATOS PROBABILÍSTICOS**

Iúri de Oliveira Parada

*Relatório submetido como requisito parcial de obtenção
de grau de Engenheiro de Controle e Automação*

Banca Examinadora

Prof. Dr. João José Costa Gondim, CIC/UnB _____
Orientador

Prof. Dr. Geraldo Magela e Silva, FIS/UnB _____
Co-orientador

Prof. Dr. Marcelo Grandi Mandelli, CIC/UnB _____
Examinador interno

Brasília, Junho de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Iúri, DE OLIVEIRA PARADA	
Aplicação de Processamento Quântico para Aceleração da Resolução de Autômatos Probabilísticos, [Distrito Federal] 2019.	
x, 58p., 297 mm (FT/UnB, Engenheiro, Controle e Automação, 2019). Trabalho de Graduação – Universidade de Brasília.Faculdade de Tecnologia.	
1.	2.
3.	
I. Mecatrônica/FT/UnB	II. Título (Série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA PARADA, IÚRI DE, (2019). Aplicação de Processamento Quântico para Aceleração da Resolução de Autômatos Probabilísticos. Trabalho de Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Publicação FT.TG-*n*º016, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 58p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Iúri de Oliveira Parada

TÍTULO DO TRABALHO DE GRADUAÇÃO: Aplicação de Processamento Quântico para Aceleração da Resolução de Autômatos Probabilísticos.

GRAU: Engenheiro

ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Trabalho de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Trabalho de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Iúri de Oliveira Parada

Dedicatória

Aos curiosos.

Iúri de Oliveira Parada

Agradecimentos

Agradeço aos orientadores Prof. Dr. João José Costa Gondim e Prof. Dr. Geraldo Magela e Silva e também ao Sr. Francisco Ramos por toda a consultoria prestada.

Iúri de Oliveira Parada

RESUMO

Autômatos probabilísticos são uma ferramenta essencial para a modelagem de uma série de sistemas dinâmicos. Este trabalho trata das possibilidades de aplicação de computadores quânticos para aceleração da resolução de autômatos probabilísticos arbitrários. A utilização de processamento quântico possibilita uma melhora de ordem quadrática na complexidade computacional do problema, entretanto, apenas autômatos cujos estados se encontram no espaço de Hilbert \mathbb{Q} (isto é, autômatos cujos estados podem ser representados por uma decomposição Kronecker em matrizes unitárias) podem ser modelados com erro nulo. Quanto menor a ortogonalidade entre os vetores das matrizes, maior será o erro, que tende ao infinito para matrizes rank 1. É apresentada uma implementação da solução quântica do problema na plataforma IBM Q Experience. É por fim descrita uma relação entre a solução de Planck para o problema da catástrofe do ultravioleta e uma técnica de controle de sistemas em tempo discreto.

Palavras Chave: Autômato Quântico, Computação Quântica, Controle Quântico, Máquina de Turing não-determinística, Complexidade Computacional

ABSTRACT

Probabilistic automata are an essential tool for modelling a wide array of dynamic systems. This work analyzes the applicability of quantum computing in accelerating the computation of arbitrary probabilistic automata. Quantum processing allows for quadratic reduction in this problem computational complexity. However only automata with transition probabilities that can be represented in Hilbert Space \mathbb{Q} , i.e. automata that can be Kronecker decomposed in unitary matrices, can be computed with zero error. The lower the orthogonality between the matrices vectors, the bigger the error, which tends to infinity for the case with rank 1 matrices. An implementation for the quantum solution of the problem in the IBM Q Experience platform is presented. Moreover, a parallel between Planck's solution for the Ultraviolet Catastrophe and a technique used for discrete time system control is established.

Keywords: Quantum Automaton, Quantum Computing, Quantum Control, Non-Deterministic Turing Machine, Computatinoal Complexity

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	PRÉ-REQUISITOS	2
1.2.1	ROADMAP PARA O ESTUDO DA CQ	2
1.2.2	ÁLGEBRA LINEAR	3
1.2.3	ANÁLISE HARMÔNICA	4
1.2.4	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	5
1.2.5	TEORIA DA COMPUTAÇÃO	5
1.2.6	TEORIA DA INFORMAÇÃO	6
1.2.7	MECÂNICA QUÂNTICA	6
1.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	7
1.4	OBJETIVOS DO PROJETO	7
1.5	RESULTADOS OBTIDOS	7
1.6	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	8
2	FUNDAMENTOS	9
2.1	FORMALIZAÇÃO MATRICIAL DA COMPUTAÇÃO CLÁSSICA	9
2.1.1	MATRIZES LÓGICAS	10
2.1.2	PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS DE MATRIZES LÓGICAS CLÁSSICAS	10
2.1.3	COMPUTAÇÃO REVERSÍVEL	11
2.2	DEFINIÇÃO DE ESTADO QUÂNTICO	12
2.3	MODELAGEM DO PROBLEMA DA RADIAÇÃO DE CORPO NEGRO	13
2.3.1	ONDAS NO ESPAÇO \mathbb{R}^3 E VETORES DE ONDA	15
2.3.2	CONTANDO OS MODOS DE VIBRAÇÃO	17
2.3.3	TEOREMA DA EQUIPARTIÇÃO E CATÁSTROFE DO ULTRAVIOLETA	18
2.3.4	O EFEITO FOTOELÉTRICO	19
2.3.5	SOLUÇÃO DA CATÁSTROFE DO ULTRAVIOLETA E DERIVAÇÃO DA LEI DE PLANCK	20
2.3.6	RELAÇÃO COM A TEORIA DE CONTROLE	21
2.4	A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER	22
2.5	O ESTADO QUÂNTICO	23
2.6	O QUBIT	24
2.6.1	A ESFERA DE BLOCH	24
2.7	PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS	25

2.7.1	PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS MAIS UTILIZADAS	26
2.8	AUTÔMATOS	30
2.8.1	AUTÔMATOS PROBABILÍSTICOS E CADEIAS DE MARKOV	31
2.8.2	AUTÔMATOS PROBABILÍSTICOS PONTUALMENTE SIMÉTRICOS.....	32
2.8.3	REPRESENTAÇÃO DE UM AUTÔMATO PROBABILÍSTICO EM QUBITS	33
2.9	PLATAFORMA IBM Q EXPERIENCE	35
2.10	IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS.....	35
2.10.1	AValiação de AUTÔMATOS ASSIMÉTRICOS.....	38
2.11	DISCUSSÃO	41
3	CONCLUSÕES	42
3.1	PERSPECTIVAS FUTURAS	42
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	43
	ANEXOS.....	45
I	DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DO CD	46
II	PROGRAMAS UTILIZADOS	47

LISTA DE FIGURAS

1.1	Roadmap para o estudo da CQ	3
2.1	Exemplo de sistema reversível	12
2.2	Exemplo de sistema irreversível	12
2.3	Setup do experimento de radiação de corpo negro	14
2.4	Sequência sucessiva de absorções, fenômeno que faz o setup da caixa se aproximar suficientemente de um corpo negro ideal.....	14
2.5	Esfera de Bloch.....	25
2.6	Máquina de Estados Finitos	31
2.7	Exemplo de automato simétrico de dois estados.....	32
2.8	Circuito Quântico.....	37
2.9	Resultados	37
2.10	4 qubits, 0 grau	38
2.11	4 qubits, 20 graus.....	39
2.12	4 qubits, 40 graus.....	39
2.13	Erro médio	40

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

c	Velocidade da Luz	
h	Constante de Planck	
j	Unidade Imaginária	
K	Constante de Boltzmann	1/J
\mathbf{k}	Vetor de Onda	
s	Frequência no domínio de Laplace	[Hz]
T	Temperatura	K
T_s	Período de amostragem	s
t	Tempo	s

Símbolos Gregos

α	Amplitude de Probabilidade de colapso para $ 0\rangle$	
β	Amplitude de Probabilidade de colapso para $ 1\rangle$	
ϕ	Fase de um qubit	
θ	Angulo de probabilidade de um qubit	
ν	Frequência	[Hz]
ψ	Função de onda do elétron	
ω	Velocidade angular	[rad/s]
λ	Comprimento de Onda	

Subscritos

Sobrescritos

Siglas

CQ	<i>Computação Quântica</i>
TC	<i>Teoria da Computação</i>
TQC	<i>Teoria Quântica da Computação</i>

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo são apresentados os atributos de máquinas quânticas que às fazem vantajosas em relação a máquinas clássicas para algumas formas de computação. São também apresentados os requisitos para se iniciar no estudo destes sistemas.

1.1 Contextualização

Computação Quântica é a utilização de fenômenos quânticos na resolução de problemas computacionais. Parece uma definição demasiadamente simplista para um segmento da Ciência da Computação tido como quase esotérico até por alguns profissionais da área. Entretanto, não há nada de intangível na teoria que descreve estes sistemas dado algum background em Mecânica Quântica e Teoria da Computação. As possibilidades proporcionadas por computadores quânticos aliadas ao estado atual da tecnologia de semicondutores criam uma grande oportunidade para indivíduos que se interessam em participar da vanguarda do desenvolvimento tecnológico.

Este capítulo introdutório documenta a fase de pesquisa e contextualização do trabalho, e pretende também ser um guia para que interessados em adentrar este campo de pesquisa tenham um roadmap detalhado de como prosseguir para fazê-lo, poupando-lhes parte do trabalho de pesquisa de fontes e organização de informação que o autor teve. Antes de dar início, vale ressaltar alguns motivos para se envolver neste campo de pesquisa.

Por que estudar Computação Quântica?

Fim da Lei de Moore

Na data de escrita deste documento o processo de construção de gates CMOS em 7nm começa a ser aplicado na produção em massa¹. Em breve, chegará a vez dos processos de 5nm e este é o limite físico da Lei de Moore, uma vez que gates menores permitiriam tunelamento quântico e deixariam o componente em um estado instável². Sendo assim, surge a demanda por novos

¹<https://www.zdnet.com/article/samsung-unveils-7nm-technology-with-euv/>

²<https://semiengineering.com/quantum-effects-at-7-5nm/>

paradigmas de sistemas computacionais ³⁴[1] de modo a permitir a continuação do crescimento exponencial de poder computacional.

Densidade de Armazenamento

A teoria quântica da informação permite representar n bits clássicos em $\log(n)$ qubits[2]. Este ganho exponencial de memória é uma das maiores vantagens da computação quântica.

Algoritmos Quânticos

Ainda há um número relativamente pequeno de algoritmos quânticos, mas entre os problemas já resolvidos estão alguns dos de maior importância para várias áreas da ciência da computação. Um computador quântico provê enorme ganho de eficiência para a busca em array [3] e resolve a fatoração de primos e o logaritmo discreto em tempo polinomial[4], para citar alguns exemplos.

Redes Quânticas

O entrelaçamento quântico permite transmissão rápida e absolutamente segura de informação entre processadores quânticos dotados de um repositório de qubits entrelaçados.[5].

1.2 Pré-Requisitos

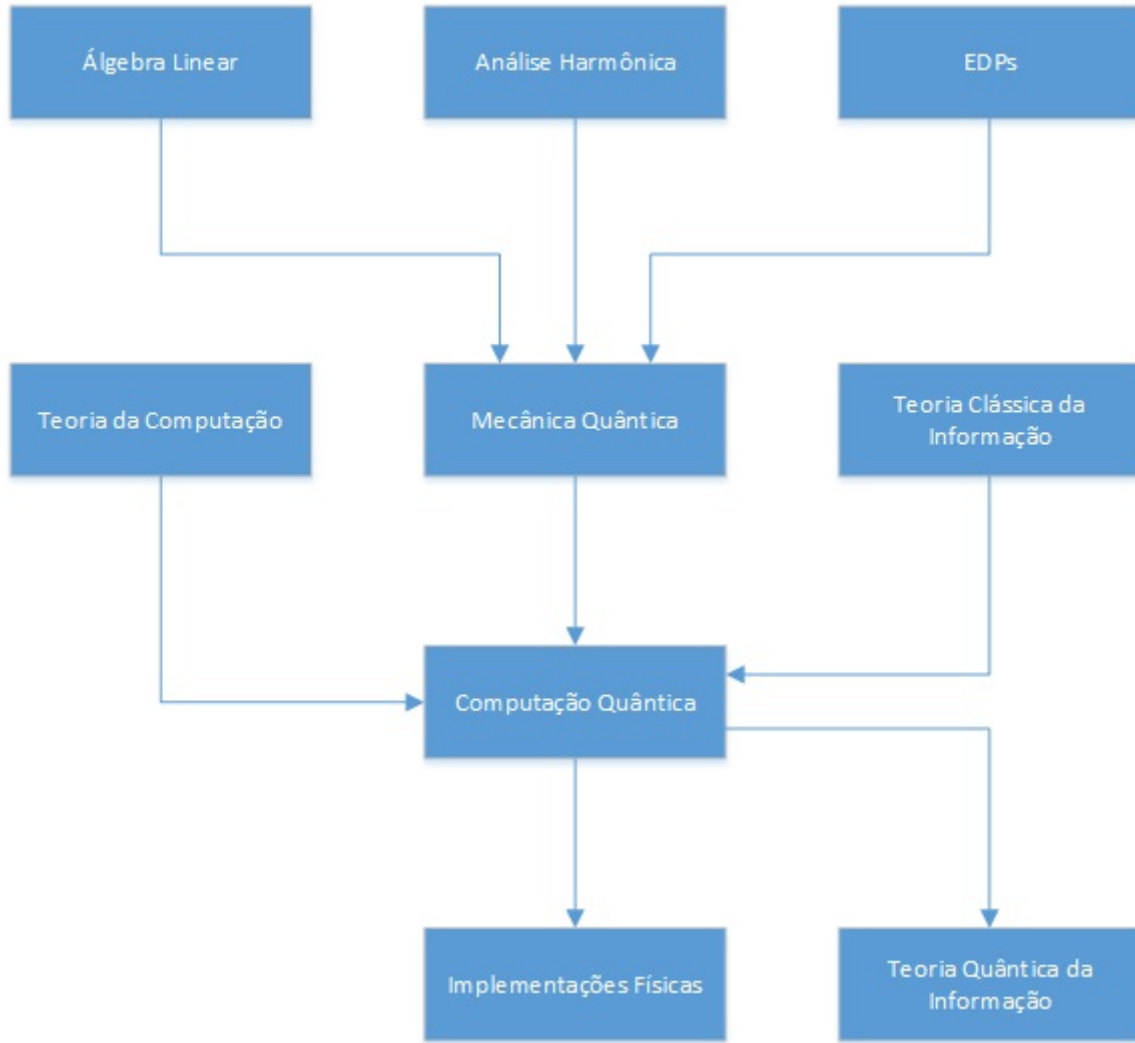
1.2.1 Roadmap para o estudo da CQ

Normalmente, alguns conceitos teóricos necessitam ser revisados antes do início do estudo da CQ. A base matemática para a mecânica quântica é a Álgebra Linear, a Análise Harmônica e as Equações Diferenciais Parciais, e um bom domínio destes temas é imprescindível. A partir do momento que se tem um bom conhecimento sobre Mecânica Quântica, são necessárias ainda a Teoria Clássica da Informação e a Teoria da Computação para que se possa iniciar o estudo da computação quântica. Este é o arsenal teórico para se estudar a computação quântica. Com um sólido conhecimento nos fundamentos da CQ estuda-se as possibilidades de implementação física de computadores quânticos e a Teoria Quântica da Informação.

³"Neuromorphic computing gets ready for the (really) big time", Don Monroe

⁴<http://www.siliconbeat.com/2016/05/04/moores-law-doubt-eyes-turn-quantum-computing/>

Figura 1.1: Roadmap para o estudo da CQ



1.2.2 Álgebra Linear

A teoria quântica contestou conceitos tidos como elementares pela física clássica e implicou resultados bastante contra-intuitivos. Entretanto, um postulado permaneceu não só incontestado, mas também é um dos pilares fundamentais da Teoria Quântica (e da relatividade, diga-se de passagem): a linearidade das leis físicas. Um universo não-linear implicaria paradoxos como a viagem mais rápida que a luz, a viagem no tempo, a violação da Segunda Lei da Termodinâmica e a variação das leis físicas no tempo e no espaço. Ao mesmo tempo, sistemas lineares são os de mais simples modelagem, mais comuns, com maior probabilidade de ter solução analítica e os mais acessíveis para a mente humana.

Sendo assim, era de se esperar que o ensino de álgebra linear para engenharia fizesse justiça à importância do tema, mas normalmente se resume a rodar algoritmos de escalonamento e inversão de matrizes no papel. Uma boa revisão ou até completo reaprendizado deste tema é normalmente necessário para se trabalhar com CQ, e é o que o autor deste trabalho fez.

A Álgebra Linear é nada menos que a linguagem na qual a mecânica quântica é escrita, e ter uma boa intuição matemática e domínio técnico sobre ela é fundamental se quisermos dominar a Teoria Quântica a ponto de aplicá-la na construção de sistemas computacionais. Uma ótima abordagem sobre o tema pode ser vista em ⁵ e um bom livro texto para consulta é ⁶. Os conceitos mais importantes de se assimilar são:

- A matriz enquanto uma transformação no espaço
- Determinantes enquanto expansão(contração) bruta no espaço causada pela matriz
- Mudanças de base
- Autovalores e Autovetores
- Espaços Vetoriais Abstratos
- Operadoes Hermitianos
- Decomposições de matrizes
- Produtos Tensoriais

1.2.3 Análise Harmônica

A dualidade onda partícula de De Broglie, as soluções oscilatórias para a equação de Schrödinger e o princípio da incerteza de Heisenberg constroem o conceito de qubit e dão base à teoria quântica da informação. Todos estes fenômenos possuem natureza oscilatória e sua modelagem se dá por meio da Análise Harmônica, que assim como a Álgebra Linear, é prudente de ser revisada antes de mergulhar no mundo da computação quântica.

Em ⁷ se tem uma boa interpretação visual para a transformada de Fourier. O livro [6] é o padrão ouro didático sobre o assunto. Alguns assuntos não muito abordados, como o fenômeno de Gibbs e as oscilações artefatos em sinais de tempo finito são também importantes de ser estudados. Transformadas intermediárias em tempo-frequência, como Transformada Fracionária de Fourier e a Transformada Wavelet também possuem aplicação na implementação física do qubit e devem ser também estudadas.

Os conceitos mais importantes de se absorver sobre Análise Harmônica para aplicá-la à Mecânica Quântica são:

- Linearidade da Decomposição em funções Ortogonais
- Bases Ortogonais de Funções
- Convergência da Transformada de Fourier

⁵https://www.youtube.com/watch?v=kjB0esZCoqc&list=PLZHQB0WTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab

⁶<http://www.math.brown.edu/~treil/papers/LADW/LADW.html>

⁷<https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>

- Análise Espectral
- Trade-offs Tempo-Frequência

Os trade-offs Tempo-Frequência são a base do princípio da incerteza de Heisenberg, muito importante para a definição de qubit. Uma ótima explicação sobre este fenômeno pode ser vista em ⁸.

1.2.4 Equações Diferenciais Parciais

Este assunto tem uma grande intersecção com a análise Harmônica. Os problemas a serem revisados são:

- Solução da Equação da Onda
- Solução da Equação de Laplace
- Soluções Analíticas para a Equação de Schrödinger

Uma bom livro texto para consulta em Física Matemática é [7].

1.2.5 Teoria da Computação

Obviamente, para se estudar a Computação Quântica deve-se ter um bom conhecimento da Teoria Clássica da Computação. Numa análise low-level, o computador quântico não deixa de ser uma generalização da máquina de Turing capaz de decidir uma classe maior de problemas em tempo polinomial. A estruturação do conhecimento sobre CQ tende muitas vezes a procurar seus paralelos com a computação clássica. Por isso, um conhecimento sólido sobre os fundamentos da TC é necessário. Os conceitos mais importantes são:

- Definição Formal da Máquina de Turing
- Tese de Church-Turing em suas formas forte e fraca
- Recursão, funções recursivamente numeráveis e não recursivamente enumeráveis
- Decidibilidade, Problema de Parada e Auto-Referência
- Complexidade Temporal de Algoritmos
- Complexidade Espacial de Algoritmos

Recomenda-se a fonte [8] para referência em Teoria da Computação.

⁸<https://www.youtube.com/watch?v=MBnnXb0M5S4>

1.2.6 Teoria da Informação

A teoria da Informação é importante em várias frentes: para a definição do qubit e consequente entendimento das capacidades de um computador quântico frente a um computador clássico, para a modelagem de ruído, que é um grande problema a ser resolvido em sistemas quânticos, para o estudo da comunicação quântica, que difere da comunicação clássica em vários aspectos, e para o entendimento de sistemas criptográficos, que serão provavelmente os primeiros a ser radicalmente alterados a medida que a CQ se tornar mais acessível.

Os conceitos da Teoria da Informação importantes de serem absorvidos são:

- Medida de Informação
- Entropia
- Modelagem de Canais
- Ruído
- Codificação
- Criptografia

Para Teoria da Informação recomenda-se a fonte [9]

1.2.7 Mecânica Quântica

Este tópico precisa naturalmente ser estudado a exaustão. Ênfase deve ser dada aos seguintes tópicos:

- Fotônica
- Ondas de Matéria
- Relações de Incerteza
- Espaços de Hilbert
- Observáveis
- Conservação de Probabilidade
- Princípio da Incerteza de Heisenberg
- Spin

1.3 Definição do problema

Dadas as possibilidades que o processamento quântico apresenta, é natural que se queira fazer um estudo das aplicações destas máquinas no que tange às aplicações de controle e automação. Após ampla análise das possibilidades, deduziu-se que um bom problema para se mapear para o caso quântico é o de autômatos estocásticos. Automatos estocásticos são autômatos não determinísticos cujas transições entre os estados são definidas por alguma distribuição estatística. O problema aqui abordado trata basicamente de:

“Dada a matriz de transição que define um autômato estocástico e uma distribuição estatística para o estado atual, calcular a distribuição estatística para o próximo estado”.

Seja n o número de estados do autômato. Em um máquina de Turing determinística este problema tem complexidade $O(n^2)$. Neste trabalho apresenta-se a avaliação deste problema em uma máquina quântica.

1.4 Objetivos do projeto

O projeto visa avaliar a resolução do problema de transições de autômatos estocásticos por máquinas quânticas. Um algoritmo é apresentado para melhorar a eficiência de resolução em relação ao caso clássico, mas é limitado quanto à classe de autômatos a que pode ser eficientemente aplicado. Esta limitação é esperada, uma vez que uma solução arbitrária para este problema em tempo constante necessita de uma máquina de Turing não determinística, instrumento com muito maior capacidade computacional que um computador quântico.

1.5 Resultados obtidos

Os resultados seguiram o que se espera segundo a modelagem teórica: uma melhora quadrática na complexidade computacional, ao custo de se ter erro zero apenas para sistemas que podem ser decompostos em matrizes unitárias (pontualmente simétricos). Quanto maior a assimetria das matrizes, maior o erro.

Três frentes de inovação são aqui apresentadas:

- Um Roadmap para os que se interessam em adentrar o campo da computação quântica
- Uma analogia entre a solução de Planck para a catástrofe do Ultravioleta e a Teoria de Controle
- Uma elaboração e implementação de técnica para aceleração da computação de autômatos probabilísticos por meio de processamento quântico

1.6 Apresentação do manuscrito

O manuscrito se inicia com a formalização matricial da computação clássica, que depois será extrapolada para o caso que engloba estados quânticos. Os estados quânticos são descritos partindo desde a resolução do problema da catástrofe do ultravioleta, fazendo um paralelo entre a solução deste problema e uma técnica da teoria de controle de sistemas em tempo discreto. São introduzidos subsequentemente os fundamentos da computação quântica e da teoria de autômatos, e em seguida é feita a apresentação do problema e da solução encontrada, fazendo a análise da implementação realizada e dos resultados.

Capítulo 2

Fundamentos

Neste capítulo é feita a formalização da computação clássica em sua forma matricial e a definição de estado quântico desde a resolução do problema da catástrofe do ultravioleta. É feito um adendo relacionando a resolução deste problema com uma técnica da Teoria de Controle. A computação quântica é então apresentada como extrapolação da forma matricial da computação clássica, de modo que não só estados clássicos, mas também quânticos, são válidos. Em seguida, é feita uma introdução à teoria de autômatos probabilísticos e então apresentada a aplicação de processamento quântico à resolução destes autômatos.

2.1 Formalização matricial da computação clássica

Estados quânticos são representados em sistemas algébricos lineares dotados de certas restrições. Uma boa abordagem para se descrever matematicamente um sistema computacional quântico é primeiro descrever a computação clássica em um sistema similar, e em seguida extrapolar para o caso quântico.

A álgebra booleana clássica consiste fundamentalmente nos operadores NOT, AND e OR aplicados sobre variáveis que podem assumir os valores 0 ou 1. Primeiramente, descreve-se as constantes 0 e 1 no novo sistema. Ao invés de constantes, aqui elas representam os *estados fundamentais* $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Estes estados são ortogonais entre si. Portanto tem-se sua forma vetorial:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A ordem da definição é arbitrária, mas deixar o estado 0 no índice 0 do vetor traz certa intuitividade à definição. A definição anterior é para sistemas de apenas um bit. A descrição de sistemas de n bits se dá por um vetor que contém todas as combinações possíveis para estados do sistema. Logo, é um vetor coluna de 2^n entradas. Um exemplo para sistemas de dois bits é:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.1.1 Matrizes Lógicas

Definidos os vetores de estado, defini-se agora os operadores que sobre eles atuam, que basicamente são matrizes dotadas de certas propriedades. Começa-se pelo mais simples operador clássico, a porta NOT.

O operador NOT é simplesmente uma inversão de base, representado pela matriz inversora:

$$NOT(\mathbf{x}) = NOT.\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\mathbf{x} \quad (2.4)$$

Os operadores AND e OR são os seguintes:

$$AND(\mathbf{x}) = AND.\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\mathbf{x} \quad (2.5)$$

$$OR(\mathbf{x}) = OR.\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\mathbf{x} \quad (2.6)$$

Pela própria definição da multiplicação matricial, nota-se que o primeiro vetor linha de um operador contém todos os estados de entrada em que o resultado do operador é $|0\rangle$, e o segundo contém todos os estados em que o resultado é $|1\rangle$.

2.1.2 Propriedades Fundamentais de matrizes lógicas clássicas

Matrizes que representam operadores booleanos possuem duas propriedades fundamentais, que são derivadas diretamente das leis da lógica de primeira ordem:

- Princípio do terceiro excluído:

"Toda proposição lógica é verdadeira ou falsa."

Isto implica que os únicos valores aceitos como entradas de uma matriz booleana são 0 ou 1.

Uma boa referência em formalização matricial da álgebra booleana é [10]

- Princípio da não-contradição:

"Nenhuma proposição lógica pode ser simultaneamente verdadeira e falsa."

Isto implica que todos os vetores coluna de uma matriz booleana terão uma, e somente uma, entrada de valor 1.

É muito importante compreender estas duas propriedades, pois, embora triviais, são elas que de certa forma são "flexibilizadas" em sistemas quânticos, permitindo-os realizar formas de computação que não são possíveis em sistemas clássicos.

2.1.3 Computação reversível

Um sistema computacional é dito reversível se sempre for possível inferir os valores de entrada do sistema a partir de suas saídas. Todo operador quântico é reversível, sendo por consequência os processadores quânticos computadores reversíveis. Um exemplo de operador reversível é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, um exemplo de operador irreversível é:

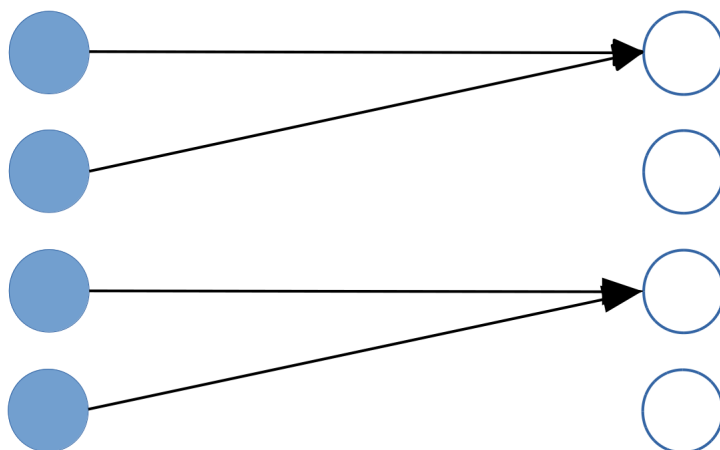
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dos exemplos citados, é fácil inferir que um sistema é reversível se, e somente si, for expressado por uma função injetora entre o conjunto das entradas e o das saídas.

Figura 2.1: Exemplo de sistema reversível



Figura 2.2: Exemplo de sistema irreversível



Logo, um sistema reversível tem número de estados de saída igual ou maior ao de estados de entrada. Como estados inacessíveis não interessam neste estudo, considerar-se-á apenas sistemas com igual número de entradas e saídas. Logo todos os operadores reversíveis envolvidos, tanto clássicos quanto quânticos, serão representados por matrizes quadradas de tamanho 2^n , sendo n o número de bits de entrada/saída.

Uma vez definida uma forma matricial para operações lógicas sobre estados clássicos, o próximo passo é extrapolá-las para estados quânticos. Prossegue-se agora para a descrição de estados quânticos.

2.2 Definição de estado quântico

Ao final do século XIX, grande parte da comunidade acadêmica julgava o processo de investigação científica da natureza como praticamente completo, uma vez que a maior parte dos fenômenos

naturais já havia sido matematicamente modelada. Um a um, mecânica, óptica, termodinâmica, eletricidade e magnetismo foram perfeitamente descritos por métodos clássicos. Entretanto, um problema ainda resistia às tentativas clássicas de resolução, pois limitações conceituais destas abordagens levavam a completos absurdos matemáticos. Este problema é o da descrição da radiação de corpo negro, cuja modelagem clássica leva ao paradoxo de que todo corpo com temperatura maior que zero emitiria energia infinita, fenômeno conhecido como a "catástrofe do ultravioleta". Max Planck passou a estudar este problema, e veio a solucioná-lo apresentando uma inovadora idéia: a quantização da energia. Este conceito foi à época introduzido como mero artifício matemático para que os modelos pudessem descrever com precisão o que se observava empiricamente, e nem o próprio Planck estava confortável em aceitar tal idéia na falta de uma interpretação física da quantização da energia. Foi só com o trabalho posterior de Einstein, Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Dirac e muitos outros que interpretações físicas para a quantização de energia foram encontradas, além de várias implicações extremamente profundas que seguem deste conceito. Na próxima seção é feita a modelagem do problema de radiação de corpo negro e a resolução de Planck. É também feito um paralelo do problema da catástrofe do ultravioleta com um problema da engenharia de controle de sistemas em tempo contínuo, e como se pode resolvê-lo discretizando o sistema.

2.3 Modelagem do problema da Radiação de Corpo Negro

A partir do momento que se percebe que a matéria emite inerentemente radiação eletromagnética, é natural que se queira descobrir os fatores que afetam este fenômeno e de que forma. Este problema é o da radiação de corpo negro. Um corpo negro é aquele absorve totalmente toda a radiação eletromagnética que o incide, e respectivamente a reemite completamente. Tal corpo é necessário para o estudo da radiação emitida pois caso hajam componentes espectrais refletidas o estudo seria comprometido. Não há corpo negro ideal na natureza, mas se pode fazer uma excelente aproximação com uma caixa fechada e um orifício do seguinte modo:

Esta montagem funciona porque mesmo que a radiação seja refletida pelas paredes internas da cavidade, o grande número de reflexões fará com que a energia refletida caia exponencialmente a cada reflexão, levando a uma absorção quase total. O buraco na cavidade deve ser pequeno o suficiente para minimizar a sua influência no experimento.

Figura 2.3: Setup do experimento de radiação de corpo negro

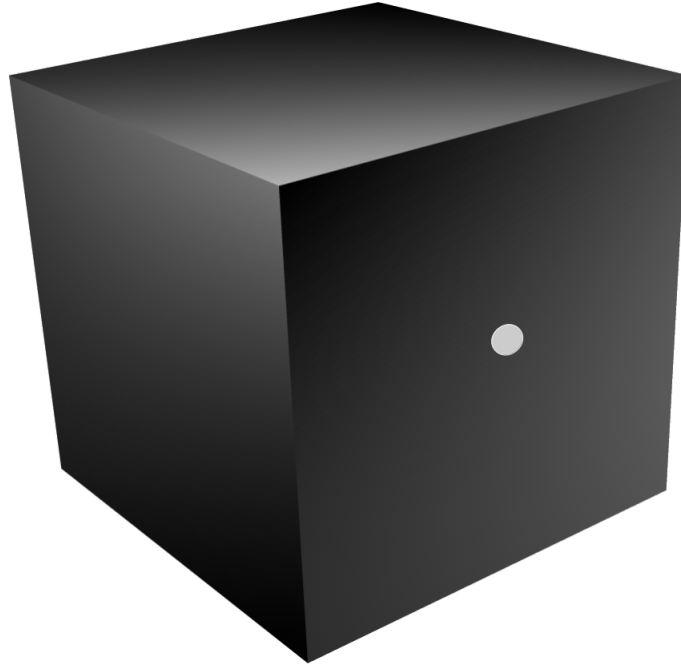
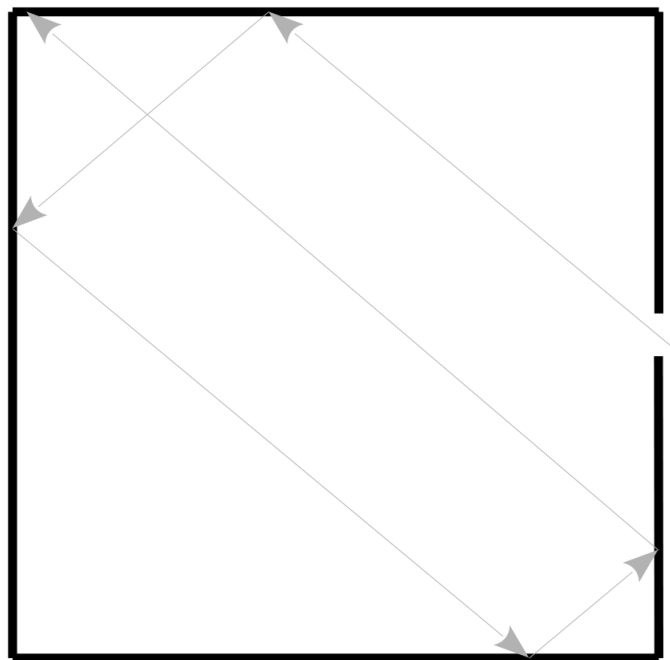


Figura 2.4: Sequência sucessiva de absorções, fenômeno que faz o setup da caixa se aproximar suficientemente de um corpo negro ideal.



A derivação aqui apresentada é adaptada de [11]

2.3.1 Ondas no espaço \mathbb{R}^3 e vetores de onda

Inicialmente, faz-se a definição de **vetor de onda**, objetos que são muito importantes nesta demonstração. A função amplitude de uma onda com comprimento λ que se propaga na direção do vetor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ em um dado instante é:

$$A(r) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi \mathbf{r}}{\lambda}\right) \quad (2.7)$$

Em termos do vetor de onda \mathbf{k} , pode ser escrita:

$$A(r) = A_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.8)$$

Sendo a norma do vetor $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Vetores de onda são nada mais que a decomposição de uma onda que se propaga em várias dimensões em cada uma de suas componentes ortogonais. A razão de se usá-los para modelar a radiação de corpo negro é porque cada uma das diferentes componenetes ortogonais é um grau de liberdade diferente para o fenômeno da emissão eletromagnética.

Considera-se uma caixa cúbica de lado L , onde ondas eletromagnéticas podem refletir em suas paredes interiores. Assume-se que as paredes da caixa são fixas, rígidas e condutoras perfeitas. Portanto, o campo elétrico nas paredes deve ser zero. Logo, os comprimentos de onda das componentes ortogonais de uma onda na caixa devem ser harmônicos do comprimento do lado da caixa:

$$\lambda_x = \frac{2L}{l} \forall l \in \mathbb{N}^+ \quad (2.9)$$

$$\lambda_y = \frac{2L}{m} \forall m \in \mathbb{N}^+ \quad (2.10)$$

$$\lambda_z = \frac{2L}{n} \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad (2.11)$$

Define-se então os vetores de onda para cada grau de liberdade:

$$k_x = \frac{2\pi l}{2L} = \frac{\pi l}{L} \forall l \in \mathbb{N}^+ \quad (2.12)$$

$$k_x = \frac{2\pi m}{2L} = \frac{\pi m}{L} \forall m \in \mathbb{N}^+ \quad (2.13)$$

$$k_y = \frac{2\pi n}{2L} = \frac{\pi n}{L} \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad (2.14)$$

Logo, a representação da onda na caixa em três dimensões em um dado instante é:

$$A(x, y, z) = A_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (2.15)$$

E pela equação diferencial da onda:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

Tem-se:

$$|r|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.17)$$

Sendo $|k|$ o vetor de onda tridimensional. Portanto:

$$|k|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi^2}{L^2} (l^2 + m^2 + n^2) \quad (2.18)$$

Logo:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{L^2} (l^2 + m^2 + n^2) = \frac{\pi^2 p^2}{L^2} \quad (2.19)$$

Onde:

$$p^2 = l^2 + m^2 + n^2 \quad (2.20)$$

Sendo l , m e n os índices dos modos de vibração em cada uma das dimensões, p é análogo ao modo equivalente da onda em três dimensões. Por não estar sujeito à condição de harmonicidade em cada dimensão, p não é necessariamente um número natural.

2.3.2 Contando os modos de vibração

A energia do sistema em uma frequência ν é dada pela soma da energia em cada grau de liberdade termodinâmico, i.e, modo de vibração na referida frequência. O teorema da equipartição garante que a energia dos diferentes modos de vibração é igual em um sistema em equilíbrio térmico. Portanto, para se ter a energia do sistema em ν , basta contar o número de modos nesta frequência e multiplicar pela energia dos modos.

Logo, precisa-se saber o número de modos de oscilação possíveis na caixa para uma onda no intervalo de frequência $\nu + d\nu$. A chave para isto é notar que pela equação 2.20, o número de modos em uma frequência é igual ao número de pontos no reticulado de coordenadas l, m, n , uma vez que p constante representa uma esfera neste reticulado. Apenas os valores positivos de l, m e n nos interessam, por tanto apenas um oitavo da casca esférica será considerado. A densidade de pontos no reticulado é de um por unidade de volume. Sendo o volume da casca esférica de raio p igual a $4\pi p^2 dp$, o número de modos envolvidos no octante é:

$$dN(p) = N(p)dp = \left(\frac{1}{8}\right)4\pi p^2 dp \quad (2.21)$$

Uma vez que $k = \frac{\pi p}{L}$ e $dk = \frac{\pi}{L} dp$, temos:

$$dN(p) = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 dk \quad (2.22)$$

Sendo $L^3 = V$ o volume da caixa e $k = \frac{2\pi\nu}{c}$, pode-se escrever a expressão como:

$$dN(p) = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk = \frac{V}{2\pi^2} \frac{8\pi^3 \nu^2}{c^3} d\nu = \frac{4\pi \nu^2 V}{c^3} d\nu \quad (2.23)$$

Como uma onda eletromagnética tem duas polarizações possíveis, multiplica-se o resultado por dois. Segue então o resultado final para o número de modos de oscilação no intervalo de frequência $\nu + d\nu$:

$$dN(\nu) = \frac{8\pi \nu^2 V}{c^3} d\nu \quad (2.24)$$

Logo, por unidade de volume da caixa, o número de modos é:

$$dN(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} d\nu \quad (2.25)$$

2.3.3 Teorema da Equipartição e Catástrofe do Ultravioleta

O Teorema da Equipartição é um teorema da mecânica estatística que implica que, em equilíbrio térmico, a energia do sistema se divide igualmente entre seus graus de liberdade. Mais precisamente, cada grau de liberdade de um sistema termodinâmico em equilíbrio térmico na temperatura T terá a energia média $\bar{E} = kT$ sendo k a constante de Boltzman.

Deriva-se aqui o teorema a partir da distribuição de Boltzmann. A distribuição de Boltzmann é basicamente a expressão de que a probabilidade de se encontrar um sistema em um estado x com energia E_x decresce exponencialmente com E_x :

$$dp(x) = \frac{1}{C_{norm}} e^{-E_x/kT} dE_x \quad (2.26)$$

Onde C_{norm} é uma constante de normalização, e portanto, a integral da função em todo o conjunto:

$$C_{norm} = \int_0^\infty e^{-E_x/kT} dE_x = kT \quad (2.27)$$

Logo, a energia média esperada do sistema é:

$$\bar{E} = \int_0^\infty E(x)p(x)dE_x = \frac{1}{C_{norm}} \int_0^\infty E(x)e^{-E_x/kT} dE_x = \frac{(kT)^2}{C_{norm}} = \frac{(kT)^2}{(kT)} = kT \quad (2.28)$$

Observação: pode-se fazer uma analogia que será muito útil posteriormente entre a equação anterior e a transformada de Laplace . Fazendo a substituição $s = 1/kT$, tem-se:

$$\bar{E} = \frac{1}{C_{norm}} \int_0^\infty x e^{x/kT} dx = \frac{1}{C_{norm}} \int_0^\infty x e^{xs} dx = \mathcal{L}\{E(x)\}(s) = \frac{1}{C_{norm}} \frac{1}{s^2} = kT \quad (2.29)$$

Obtida a energia média, tem-se portanto a energia do sistema na frequência ν por unidade de volume, que é:

$$du = u(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E} d\nu \quad (2.30)$$

$$\implies u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E} \quad (2.31)$$

Tendo-se a resposta final para a energia emitida pelo sistema em função da frequência, conhecida como Lei da Emissão de Rayleigh-Jeans:

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT \quad (2.32)$$

A energia total do sistema é a integral sobre todas as frequências. Portanto:

$$E_{total} = \int_0^\infty u(\nu)d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kTd\nu = \infty \quad (2.33)$$

Para quem ao final do século XIX achou que a física estava praticamente completa, este último resultado causou grande desconforto. A modelagem não apresenta qualquer erro do ponto de vista da física clássica, e combina resultados consolidados do eletromagnetismo e da termodinâmica para modelar o fenômeno da emissão eletromagnética pela matéria. Entretanto, sua consequência direta é a de que qualquer corpo com temperatura maior que zero emite energia infinita, o que evidentemente é absurdo. Contornar este problema não foi nada fácil, pois a consistência teórica e experimental de todas as premissas envolvidas indicava que algo muito fundamental na compreensão humana da natureza não estava certo. A idéia revolucionária foi repensar fundamentalmente o próprio conceito de energia, que ao invés de ser considerada algo contínuo, passou a ser vista como uma quantia discreta. Na próxima seção explica-se esta idéia mais detalhadamente.

2.3.4 O Efeito Fotoelétrico

Embora Planck tenha elaborado a idéia da quantização de energia apenas como artifício matemático e sem qualquer interpretação física para ela, este conceito será aqui apresentado já a partir do trabalho de Einstein sobre o efeito fotoelétrico.

Foi percebido que a radiação eletromagnética, especialmente em comprimentos de onda mais curtos, é capaz de arrancar elétrons de placas condutoras. Empiricamente coletou-se os seguintes dados sobre este fenômeno:

1. A tensão induzida pelo efeito varia linearmente com a frequência da luz emitida.
2. A curva de tensão induzida em função da frequência de luz emitida apresenta um pequeno delay, ou zona morta
3. A intensidade luminosa não influencia na largura do delay de tensão, apenas na corrente final produzida.

Einstein percebeu que o conceito de quantização da energia resolvia de forma bastante elegante todas as questões sobre este problema. Considerando-se a energia dividida em pacotes discretos, tal que uma onda eletromagnética de frequência ν terá pacotes com energia:

$$E = h\nu \quad (2.34)$$

- Resolve-se (1), pela própria natureza da equação
- Resolve-se (2), uma vez que frequências muito baixas não têm energia suficiente para excitar os elétrons da placa metálica, que no caso têm um threshold de energia maior do que a energia dos fótons em questão.
- Resolve-se (3), uma vez que a energia do fóton não é função da intensidade da onda. Do ponto de vista da fotônica, a intensidade de uma onda é apenas a quantidade de fótons individuais envolvidos.

2.3.5 Solução da Catástrofe do Ultravioleta e Derivação da Lei de Planck

O efeito fotoelétrico mostra a natureza quantizada da energia. Esta característica resolve o problema da catástrofe do ultravioleta. Para isso deve-se recalculer a distribuição de Boltzman para um sistema de energia quantizada. Isto significa que cada modo ν poderá apenas assumir valores de energia da forma $E(\nu) = nh\nu, n \in \mathbb{N}$, onde n fótons são associados ao modo em questão.

Considera-se agora todos os fótons em equilíbrio térmico a uma temperatura T . Para se estabelecer equilíbrio térmico, deve existir formas dos diferentes fótons trocarem energia entre si, e estas trocas só podem ocorrer com outros osciladores contidos no sistema. Utilizamos agora a distribuição de Boltzman para calcular a energia em cada modo. A probabilidade de que um modo tenha energia $E_n = nh\nu$ é:

$$p(n) = \frac{\exp(-E_n/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/kT)} \quad (2.35)$$

O somatório no denominador garante a normalização da distribuição. Do ponto de vista da fotônica esta função retorna a probabilidade de que o modo contenha n fótons na frequência ν . A energia média do modo de frequência ν é então:

$$\bar{E}_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p(n) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp(-E_n/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/kT)} \quad (2.36)$$

$$\bar{E}_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p(n) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \cdot \exp(-nh\nu/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nh\nu/kT)} \quad (2.37)$$

Substitui-se $z = \exp(-h\nu/kT)$. Logo:

$$\bar{E}_v = h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} z^n} = h\nu \frac{(z + 2z^2 + 3z^3 + \dots)}{(1 + z + z^2 + \dots)} = h\nu z \frac{(1 + 2z + 3z^2 + \dots)}{(1 + z + z^2 + \dots)} \quad (2.38)$$

Considerando as seguintes expansões em série de potência:

$$\frac{1}{(z-1)} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \dots \quad (2.40)$$

Tem-se que a energia de cada modo é:

$$\bar{E}(\nu) = \frac{h\nu z}{1-z} = \frac{h\nu}{z^{-1}-1} = \frac{h\nu}{e^{(h\nu/kT)}-1} \quad (2.41)$$

Aplicando-se a equação anterior à equação 2.31, chega-se finalmente à Lei de Planck:

$$u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} d\nu \quad (2.42)$$

2.3.6 Relação com a teoria de controle

A variável z não foi escolhida à toa na substituição na equação 2.38. É fácil notar que esta equação é análoga à transformada Z de um sistema onde a energia dos fótons é o sinal de entrada e a energia média do sistema é o sinal de saída. A partir do momento em que se discretiza o sinal de entrada, tem-se um sinal de saída estável, condizente com a realidade física. A transformada Z de uma função discreta $x[nT]$, onde T é o período de amostragem, é:

$$\mathcal{Z}\{x[nT]\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (2.43)$$

Esta transformada é o análogo discreto da transformada de Laplace, sendo $z = e^{sT_s}$ onde s é a variável de frequência do domínio de Laplace e T_s é o “tempo de amostragem”, que no caso em questão é o quantum de energia $h\nu$. No caso apresentado, usa-se os resultados:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\}(z) = \frac{z}{z-1} \quad (2.44)$$

$$\mathcal{Z}\{nu[n]\}(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (2.45)$$

Onde $u[n]$ é a função degrau unitário discreta.

A substituição feita foi $z = \exp(-h\nu/kT)$. Nota-se claramente a substituição $s = 1/kT$, assim como no caso contínuo, e o “quantum de amostragem” em questão $T_s = h\nu$. Fazendo a análise dimensional, as unidades de $1/kT$ e $h\nu$ são o inverso uma da outra, assim como tempo e frequência.

Percebe-se que a integral da transformada de Laplace $\int_0^\infty \frac{1}{s} ds$ não converge, mas a integral da transformada da função discretizada $\int_0^\infty \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} d\nu$ sim.

2.4 A equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger não é nada mais que o princípio da conservação de energia levando em conta os postulados quânticos. É uma equação diferencial cuja solução é uma função ondulatória que descreve o estado do sistema quântico envolvido [12]. Para derivá-la, leva-se em conta as seguintes relações:

O princípio da conservação de energia, aqui expresso em forma Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \hat{V} + \hat{T} \quad (2.46)$$

4

Onde \hat{V} é o operador energia potencial, ou o potencial do campo elétrico em (\mathbf{r}, t) ,

$$\hat{V} = V(\mathbf{r}, t) \quad (2.47)$$

4

O operador \hat{T} é o operador energia cinética:

$$\hat{T} = \frac{mv^2}{2} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{j\hbar^2 \nabla^2}{2m} \quad (2.48)$$

Onde o último passo da derivação segue do comprimento da onda de matéria segundo a Hipótese de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (2.49)$$

Por último, o operador \hat{H} é o operador energia total, que no caso é:

$$\hat{H} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.50)$$

A relação anterior segue diretamente do princípio da discretização da energia:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \hbar = \frac{h}{2\pi}, \omega = 2\pi\nu \quad (2.51)$$

Substituindo as equações 2.47, 2.48 e 2.50 em 2.46, escreve-se a equação de Schrödinger:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\mathbf{r}, t) \Psi = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.52)$$

Que em forma unidimensional é:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi = -j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.53)$$

Ela é basicamente a equação diferencial da onda expressa no conjunto dos complexos. Derivando o segundo lado pode-se expressá-la como uma equação de onda, e a análise dimensional do termo c mostra que ele de fato expressa uma velocidade de propagação.

2.5 O Estado Quântico

Nota-se claramente que a equação de Schrödinger é uma equação diferencial parcial de segunda ordem e consequentemente o sistema físico que descreve o elétron é um sistema de segunda ordem. Portanto, o estado de um elétron em um dado ponto no tempo é completamente descrito pelos valores de ordem zero e um de sua função de onda, ou seja, sua posição e velocidade. Entretanto, chega-se a um fenômeno que não se tem em sistemas clássicos, e que gera a primeira grande não-intuitividade da mecânica quântica: pela função de onda chega-se a conclusão de que posição e

momento do elétron estão relacionados. De fato, o espaço-momento é a transformada de Fourier do espaço-posição. E pelo trade-off tempo frequência, percebe-se que é impossível se saber simultaneamente a posição e o momento de um elétron. Este é o princípio da incerteza de Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Um estado quântico é descrito pela probabilidade de um elétron ser medido em cada um dos seus possíveis estados fundamentais. É essa diferença em relação ao determinismo dos estados clássicos que é aplicada na computação quântica.

2.6 O qubit

Já vimos na seção 2.1.1 que o bit clássico pode ser representado por uma certa classe de matrizes de estado. As restrições que definem tal classe seguem dos postulados básicos da lógica proposicional. Estados quânticos por sua vez têm propriedades mais "relaxadas". A representação em vetor de estado de um qubit é apresentada a seguir:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.54)$$

Onde a probabilidade da função de onda envolvida colapsar para $|0\rangle$ após a medida é α^2 e para $|1\rangle$ é β^2 . Naturalmente, segue que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

A fonte padrão para os fundamentos da computação quântica é [13].

2.6.1 A esfera de Bloch

A esfera de Bloch é uma forma de se representar matematicamente um qubit. A partir da propriedade $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, percebe-se que o conjunto de todos os estados possíveis para um qubit se distribui em uma esfera (lembrando que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$).

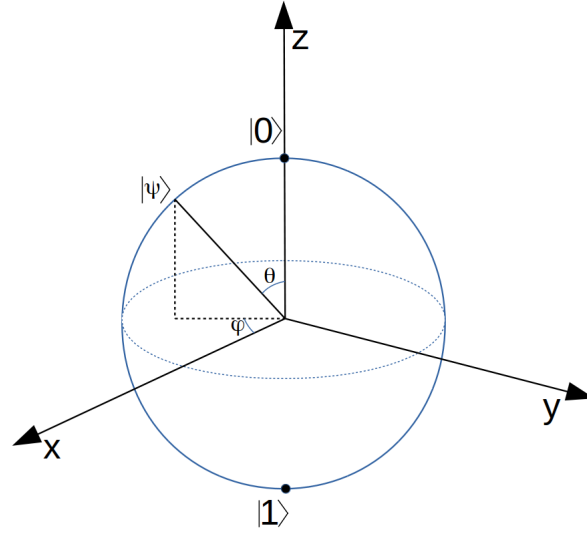
A transformação de parâmetros da forma vetorial para a esfera de bloch é:

$$\theta = 2\cos^{-1}(|\alpha|) = 2\sin^{-1}(|\beta|) \quad (2.55)$$

$$\phi = \arg(\beta) - \arg(\alpha) \quad (2.56)$$

De modo análogo ao que foi feito com matrizes booleanas, descreve-se as propriedades de matrizes computacionais quânticas. As três propriedades fundamentais seguem da equação de Schrödinger, do princípio da incerteza de Heisenberg e do princípio da reversibilidade de sistemas dinâmicos quânticos, e são:

Figura 2.5: Esfera de Bloch



1. Todas as entradas de uma matriz computacional quântica são números complexos.
2. As somas dos quadrados dos elementos de um mesmo vetor coluna é igual a 1.
3. Os operadores são representados por matrizes quadradas unitárias de 2^n linhas(colunas), sendo n o número de qubits envolvidos.

2.7 Portas Lógicas Quânticas

Portas quânticas são aqui apresentadas como extrapolações das portas clássicas apresentadas na seção 2.1.1. São basicamente operadores matriciais sujeitos às propriedades descritas na última seção, que são menos restritivas do que os postulados da lógica proposicional aos quais os operadores clássicos estão sujeitos, fazendo com que estes operadores possam realizar formas de computação que não são possíveis em máquinas clássicas. Vale ressaltar que os operadores clássicos são um subconjunto dos operadores quânticos.

No caso geral, uma porta lógica quântica de um qubit é representada por uma matriz unitária:

$$G_q = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -e^{j\lambda} \sin(\theta/2) \\ e^{j\phi} \sin(\theta/2) & e^{j(\lambda+\phi)} \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Analogamente, portas de n qubits são matrizes unitárias de tamanho $2^n \times 2^n$. A junção de dois sistemas quânticos se dá pelo produto tensorial entre os sistemas. No caso especial de matrizes, o produto tensorial é o produto de Kronecker. Portanto aplicar a porta G_{q_0} ao qubit $|q_0\rangle$ e a porta G_{q_1} ao qubit $|q_1\rangle$ é equivalente a aplicar a porta:

$$G_{q_1 q_0} = G_{q_1} \otimes G_{q_0} \quad (2.58)$$

Ao sistema de dois qubits $|q_1 q_0\rangle$.

Obviamente, é raro que se necessite utilizar uma porta quântica em sua forma geral. Os casos particulares mais utilizados e seus parâmetros seguem a seguir.

2.7.1 Portas Lógicas Quânticas mais utilizadas

2.7.1.1 Hadamard

É uma porta de um bit que realiza uma rotação de π rad em volta do eixo z seguida por uma rotação de $\pi/2$ rad em volta do eixo y, levando qubits de estados fundamentais à superposição perfeita. É uma das portas quânticas mais utilizadas.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

2.7.1.2 Pauli-X

Age sobre um qubit e é o equivalente quântico da porta NOT, invertendo o estado de um qubit fundamental. Realiza uma rotação de π rad em volta do eixo x.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

2.7.1.3 Pauli-Y

Age sobre um qubit e realiza uma rotação de π rad em volta do eixo y.

$$\begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

2.7.1.4 Pauli-Z

Age sobre um qubit e realiza uma rotação de π rad em volta do eixo z. É um caso especial do gate de phase shift.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

2.7.1.5 \sqrt{NOT}

A raiz quadrada do NOT faz uma rotação de $\pi/2$ rad em volta do eixo x. Gates análogos existem para as porta Pauli-Y e Pauli-Z.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+j & 1-j \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

2.7.1.6 Phase Shift

Este gate mantém inalterada a probabilidade de colapso para qualquer um dos estados fundamentais, mas aplica um ganho de fase de $e^{j\phi}$ à entrada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{j\phi} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

2.7.1.7 SWAP

Esta é uma porta lógica de dois bits. A porta SWAP realiza a inversão dos dois bits de entrada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

2.7.1.8 \sqrt{SWAP}

A raiz quadrada do SWAP realiza um meia inversão dos bits de entrada. É um gate quântico universal, o que significa que qualquer porta com um número arbitrário de entradas pode ser construído com gates \sqrt{SWAP} e gates de um bit.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+j) & \frac{1}{2}(1-j) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-j) & \frac{1}{2}(1+j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

2.7.1.9 CNOT

É uma porta NOT dotada de um qubit de controle. Caso o qubit de control colapse para $|1\rangle$, o operador aplicado sobre o outro qubit é o NOT. Caso colapse para $|0\rangle$, o operador aplicado é a identidade.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

2.7.1.10 CY

É uma porta Pauli-Y dotada de um qubit de controle. Caso o qubit de control colapse para $|1\rangle$, o operador aplicado sobre o outro qubit é o Pauli-Y. Caso colapse para $|0\rangle$, o operador aplicado é a identidade.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

2.7.1.11 CZ

É uma porta Pauli-Z dotada de um qubit de controle. Caso o qubit de control colapse para $|1\rangle$, o operador aplicado sobre o outro qubit é o Pauli-Z. Caso colapse para $|0\rangle$, o operador aplicado é a identidade.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

2.7.1.12 Toffoli

A porta Toffoli é uma porta de três qubits que pode ser vista como um NOT com duplo controle, e por isso é as vezes referida por CCNOT. Caso os dois bits de control colapsem para 1 é realizada uma operação not sobre o terceiro, caso contrário o operador aplicado é a identidade. Por ser modelado na computação clássica por portas not e and, o Toffoli é um gate universal em casos clássicos.

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix} \quad (2.70)$$

2.7.1.13 Fredkin

O Fredkin é um gate de três bits que é nada mais que um SWAP controlado, também referido por CSWAP. Caso o primeiro bit colapse para $|0\rangle$ é realizada uma operação SWAP sobre os outros dois, caso contrário, aplica-se a identidade.

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Gates Ising são gates de 2 qubits, que são nativamente presentes em algumas implementações de computadores de armadilhas de íons.

2.7.1.14 Ising XX

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -je^{j\phi} \\
0 & 1 & -j & 0 \\
0 & -j & 1 & 0 \\
-je^{-j\phi} & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \quad (2.72)$$

2.7.1.15 Ising YY

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & 0 & j\sin(\phi) \\ 0 & \cos(\phi) & -j\sin(\phi) & 0 \\ 0 & -j\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ j\sin(\phi) & 0 & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

2.7.1.16 Ising ZZ

$$\begin{bmatrix} e^{j\phi/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\phi/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j\phi/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{j\phi/2} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

2.8 Autômatos

2.8.0.1 Autômatos de estados finitos

Os autômatos de estados finitos são objetos fundamentais de estudo e modelagem tanto para a Teoria da Computação quanto para a Engenharia de Controle. Tratam de uma descrição fechada dos estados de um sistema, dotada de uma função que descreve as transições entre os estados deste sistema segundo os valores de entrada, que se dão na forma de símbolos contidos num alfabeto definido para cada sistema. A máquina de Turing pode ser vista como uma máquina de estados dotada de um memória de acesso aleatório. A definição formal de um autômato de Estados Finitos é feita a seguir.

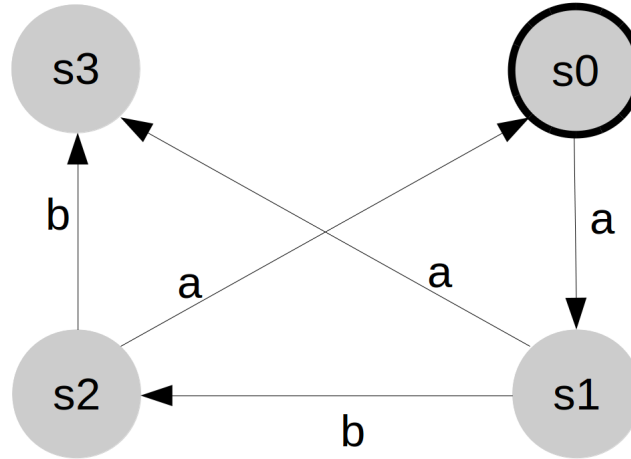
Um autômato de estados finitos é uma quintupla composta de:

1. Um alfabeto de símbolos de entrada Σ
2. Um conjunto finito de estados do sistema \mathbf{Q}
3. Uma função de transição $\delta : \Sigma \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$
4. Um estado inicial $s_0 \in \mathbf{Q}$
5. Um conjunto de estados finais aceitos (marcados) $\mathbf{F} \in \mathbf{Q}$

Um exemplo de representação gráfica de um autômato de estados finitos é:

Onde s_0 é o estado inicial.

Figura 2.6: Máquina de Estados Finitos



2.8.0.2 Decomposição bit a bit de um autômato

Um autômato de estados finitos cujos estados são representados por um número de n bits $|b_n...b_0\rangle$ pode ser decomposto em autômatos de um bit, cada um com sua própria função de transição e estado inicial. Este processo ¹ utiliza álgebra booleana e é bastante utilizado para se implementar máquinas de estados finitos através de elementos lógicos básicos.

2.8.1 Autômatos Probabilísticos e Cadeias de Markov

Autômatos probabilísticos são autômatos de estados finitos cujas transições entre estados seguem alguma distribuição estatística. Estes autômatos são utilizados para modelar uma série de sistemas dinâmicos. Exemplos de aplicação são o Modelo de Black-Scholes no mercado financeiro e o controle adaptativo de sistemas.

Um autômato probabilístico é descrito por sua Matriz de Transição de Estados. A matriz de transição T é uma matriz onde o elemento T_{ij} representa a probabilidade de um sistema no estado inicial j transicionar para o estado i . Portanto, em toda Matriz de Transição de Estados a soma dos elementos de um vetor coluna é igual a 1. A sequência de transições de estados através da Matriz de Transição é denominada *Cadeia de Markov*.

Um exemplo de matriz de transição de uma cadeia de Markov é:

$$T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

¹<https://www.elprocus.com/finite-state-machine-mealy-state-machine-and-moore-state-machine/>

Da própria definição da multiplicação matricial segue que uma transição em um autômato probabilístico é um problema de complexidade n^2 .

2.8.1.1 Decomposição bit a bit de um autômato probabilístico

De modo análogo à seção anterior, também se pode decompor uma cadeia de Markov bit a bit. A decomposição de uma cadeia cujos estados são representados por n bits e cuja matriz de transição terá portanto tamanho $2^n \times 2^n$ é feita através da decomposição Kronecker. Aplicando-se o algoritmo de decomposição descrito em [14] e a restrição de soma unitária nos vetores coluna, chega-se a um sistema de n matrizes 2×2 .

$$T^{2^n \times 2^n} = T_0^{2 \times 2} \otimes T_1^{2 \times 2} \otimes T_2^{2 \times 2} \dots \otimes T_n^{2 \times 2} \quad (2.76)$$

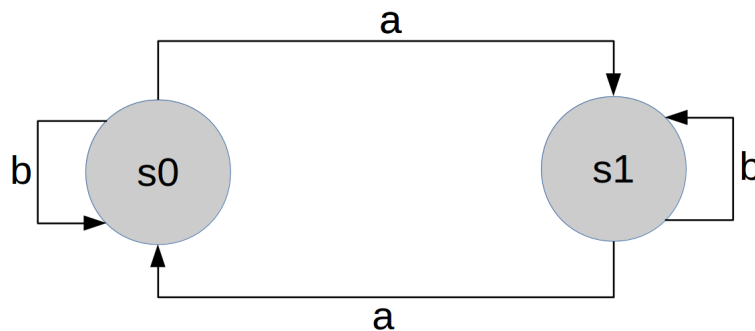
2.8.2 Autômatos Probabilísticos Pontualmente Simétricos

Esta definição não foi encontrada na literatura e presume-se que seja inédita deste trabalho. Seja um autômato probabilístico clássico de 2^n estados. O estado deste autômato é descrito por um número de n bits $|b_n \dots b_0\rangle$. Um autômato estocástico pontualmente simétrico é um autômato onde para todo b_n , $p\{b_n\}(0 \rightarrow 1) = p\{b_n\}(1 \rightarrow 0)$ e $p\{b_n\}(0 \rightarrow 0) = p\{b_n\}(1 \rightarrow 1)$. Logo, a matriz de transição de um autômato pontualmente simétrico será da forma:

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Onde $a + b = 1$

Figura 2.7: Exemplo de automato simétrico de dois estados



A partir daí pode-se associar, sem perda de generalidade, a seguinte matriz a um autômato pontualmente simétrico:

$$T' = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & -\sqrt{b} \\ \sqrt{b} & \sqrt{a} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Que é um caso particular de matriz unitária.

2.8.2.1 Assimetria de um Autômato

Seja B o conjunto das matrizes da descrição pontual de um autômato de n bits, de modo que para o bit n :

$$B_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

A assimetria pontual do bit n , notada Ap_n é então definida por:

$$Ap_n = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = ac + bd \quad (2.80)$$

E a assimetria do autômato é a média quadrática do erro em cada bit, definido como:

$$A = \sum_{n=0}^N (Ap_n)^2 \quad (2.81)$$

2.8.3 Representação de um autômato probabilístico em qubits

É fácil perceber que um autômato probabilístico pontualmente simétrico com 2^n estados é representado por uma composição de n matrizes unitárias 2×2 , e portanto, pode ser representado por um sistema de n qubits. Para autômatos não pontualmente simétricos faz-se uma aproximação com a utilização da fase do qubit. O erro de aproximação cresce com a assimetria do autômato. Como exemplo implementa-se o seguinte autômato probabilístico de 16 estados:

$$T = \begin{bmatrix} 0.0090 & 0.0210 & 0.0810 & 0.1890 & 0.0030 & 0.0070 & 0.0270 & 0.0630 & 0.0135 & 0.0315 \\ 0.1215 & 0.2835 & 0.0045 & 0.0105 & 0.0405 & 0.0945 & & & & \\ 0.0210 & 0.0090 & 0.1890 & 0.0810 & 0.0070 & 0.0030 & 0.0630 & 0.0270 & 0.0315 & 0.0135 \\ 0.2835 & 0.1215 & 0.0105 & 0.0045 & 0.0945 & 0.0405 & & & & \\ 0.0810 & 0.1890 & 0.0090 & 0.0210 & 0.0270 & 0.0630 & 0.0030 & 0.0070 & 0.1215 & 0.2835 \\ 0.0135 & 0.0315 & 0.0405 & 0.0945 & 0.0045 & 0.0105 & & & & \\ 0.1890 & 0.0810 & 0.0210 & 0.0090 & 0.0630 & 0.0270 & 0.0070 & 0.0030 & 0.2835 & 0.1215 \\ 0.0315 & 0.0135 & 0.0945 & 0.0405 & 0.0105 & 0.0045 & & & & \\ 0.0030 & 0.0070 & 0.0270 & 0.0630 & 0.0090 & 0.0210 & 0.0810 & 0.1890 & 0.0045 & 0.0105 \\ 0.0405 & 0.0945 & 0.0135 & 0.0315 & 0.1215 & 0.2835 & & & & \\ 0.0070 & 0.0030 & 0.0630 & 0.0270 & 0.0210 & 0.0090 & 0.1890 & 0.0810 & 0.0105 & 0.0045 \\ 0.0945 & 0.0405 & 0.0315 & 0.0135 & 0.2835 & 0.1215 & & & & \\ 0.0270 & 0.0630 & 0.0030 & 0.0070 & 0.0810 & 0.1890 & 0.0090 & 0.0210 & 0.0405 & 0.0945 \\ 0.0045 & 0.0105 & 0.1215 & 0.2835 & 0.0135 & 0.0315 & & & & \\ 0.0630 & 0.0270 & 0.0070 & 0.0030 & 0.1890 & 0.0810 & 0.0210 & 0.0090 & 0.0945 & 0.0405 \\ 0.0105 & 0.0045 & 0.2835 & 0.1215 & 0.0315 & 0.0135 & & & & \\ 0.0135 & 0.0315 & 0.1215 & 0.2835 & 0.0045 & 0.0105 & 0.0405 & 0.0945 & 0.0090 & 0.0210 \\ 0.0810 & 0.1890 & 0.0030 & 0.0070 & 0.0270 & 0.0630 & & & & \\ 0.0315 & 0.0135 & 0.2835 & 0.1215 & 0.0105 & 0.0045 & 0.0945 & 0.0405 & 0.0210 & 0.0090 \\ 0.1890 & 0.0810 & 0.0070 & 0.0030 & 0.0630 & 0.0270 & & & & \\ 0.1215 & 0.2835 & 0.0135 & 0.0315 & 0.0405 & 0.0945 & 0.0045 & 0.0105 & 0.0810 & 0.1890 \\ 0.0090 & 0.0210 & 0.0270 & 0.0630 & 0.0030 & 0.0070 & & & & \\ 0.2835 & 0.1215 & 0.0315 & 0.0135 & 0.0945 & 0.0405 & 0.0105 & 0.0045 & 0.1890 & 0.0810 \\ 0.0210 & 0.0090 & 0.0630 & 0.0270 & 0.0070 & 0.0030 & & & & \\ 0.0045 & 0.0105 & 0.0405 & 0.0945 & 0.0135 & 0.0315 & 0.1215 & 0.2835 & 0.0030 & 0.0070 \\ 0.0270 & 0.0630 & 0.0090 & 0.0210 & 0.0810 & 0.1890 & & & & \\ 0.0105 & 0.0045 & 0.0945 & 0.0405 & 0.0315 & 0.0135 & 0.2835 & 0.1215 & 0.0070 & 0.0030 \\ 0.0630 & 0.0270 & 0.0210 & 0.0090 & 0.1890 & 0.0810 & & & & \\ 0.0405 & 0.0945 & 0.0045 & 0.0105 & 0.1215 & 0.2835 & 0.0135 & 0.0315 & 0.0270 & 0.0630 \\ 0.0030 & 0.0070 & 0.0810 & 0.1890 & 0.0090 & 0.0210 & & & & \\ 0.0945 & 0.0405 & 0.0105 & 0.0045 & 0.2835 & 0.1215 & 0.0315 & 0.0135 & 0.0630 & 0.0270 \\ 0.0070 & 0.0030 & 0.1890 & 0.0810 & 0.0210 & 0.0090 & & & & \end{bmatrix}$$

(2.82)

Sobre o vetor de estados de entrada:

$$(2.83) \quad T = \begin{bmatrix} 0.0024 \\ 0.0216 \\ 0.0056 \\ 0.0504 \\ 0.0096 \\ 0.0864 \\ 0.0224 \\ 0.2016 \\ 0.0036 \\ 0.0324 \\ 0.0084 \\ 0.0756 \\ 0.0144 \\ 0.1296 \\ 0.0336 \\ 0.3024 \end{bmatrix}$$

2.9 Plataforma IBM Q experience

A plataforma IBM Q Experience foi criada pela IBM com o objetivo de estabelecer uma comunidade de desenvolvedores para plataformas quânticas e expandir o leque de aplicações destas máquinas. Máquinas de 5 e 14 qubits são disponibilizadas aos usuários. A programação é feita através da descrição do hardware quântico. Os qubits são todos setados para $|0\rangle$ na entrada. A saída é feita através da medição do qubit. Para se descrever o hardware há duas possibilidades: Uma interface gráfica chamada Composer e a linguagem de programação OPENQASM. Há também a possibilidade de se usar um SDK Python chamado QisKit, que permite uma programação bastante similar ao OPENQASM e dá acesso às máquinas da IBM, além de incorporar as funcionalidades do Python. A plataforma pode ser acessada através de <https://quantum-computing.ibm.com>.

2.10 Implementação e Resultados

Uma vez decomposto o autômato em matrizes unitárias, a implementação é relativamente direta: basta implementar o gates quânticos $u3$ (matriz unitária genérica) em cada qubit com os parâmetros

das matrizes unitárias da decomposição. A primeira coluna de gates `u3` seta o estado de entrada. Em seguida, a coluna Hadamard faz a transformada quântica de Fourier. Por final a segunda coluna Hadamard faz a transformada inversa e os qubits são medidos.

Aqui se apresenta a implementação do autômato mencionado na seção 2.8.3, que é simétrico, na plataforma IBM Q experience:

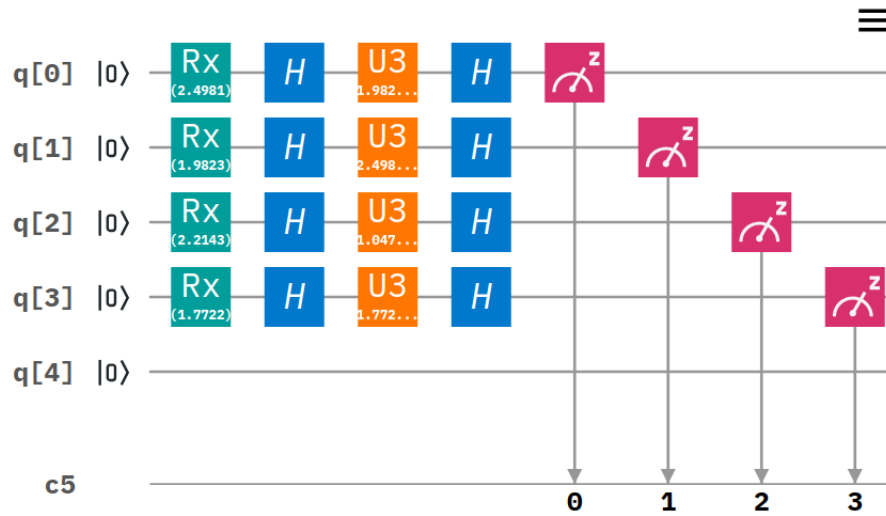
```
OPENQASM 2.0;
include "qelib1.inc";

qreg q[5];
creg c[5];

rx(2.4981) q[0];
rx(1.9823) q[1];
rx(2.2143) q[2];
rx(1.7722) q[3];
h q[0];
h q[1];
h q[2];
h q[3];
u3(1.9823,0,0) q[0];
u3(2.4981,0,0) q[1];
u3(1.0472,0,0) q[2];
u3(1.7722,0,0) q[3];
h q[0];
h q[1];
h q[2];
h q[3];
measure q[0] -> c[0];
measure q[1] -> c[1];
measure q[2] -> c[2];
measure q[3] -> c[3];
```

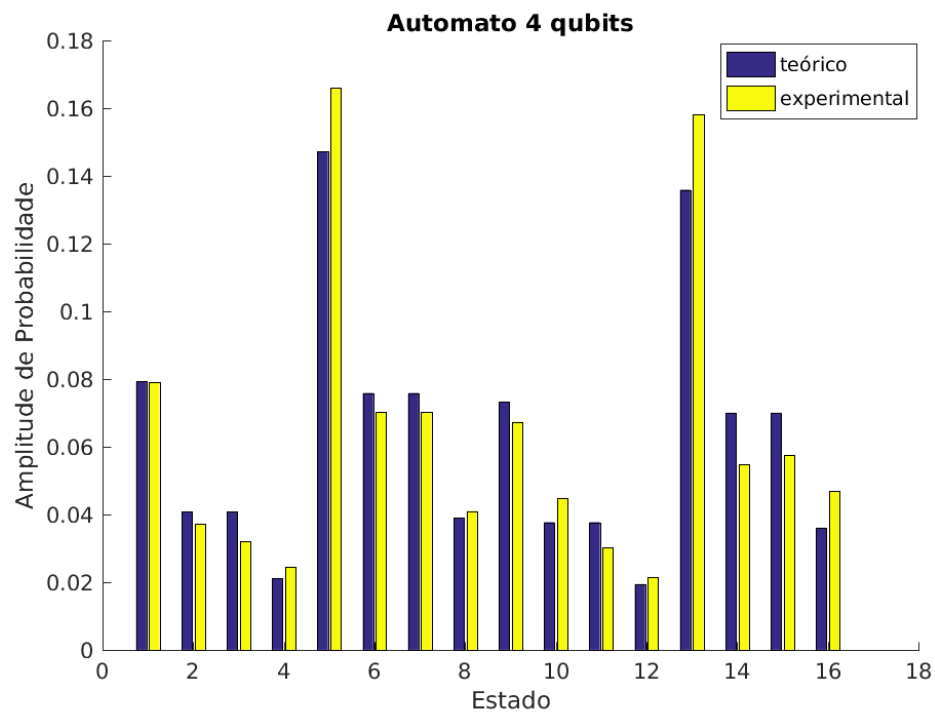
Figura 2.8: Circuito Quântico

Original circuit diagram



E obtêm-se os seguintes resultados:

Figura 2.9: Resultados

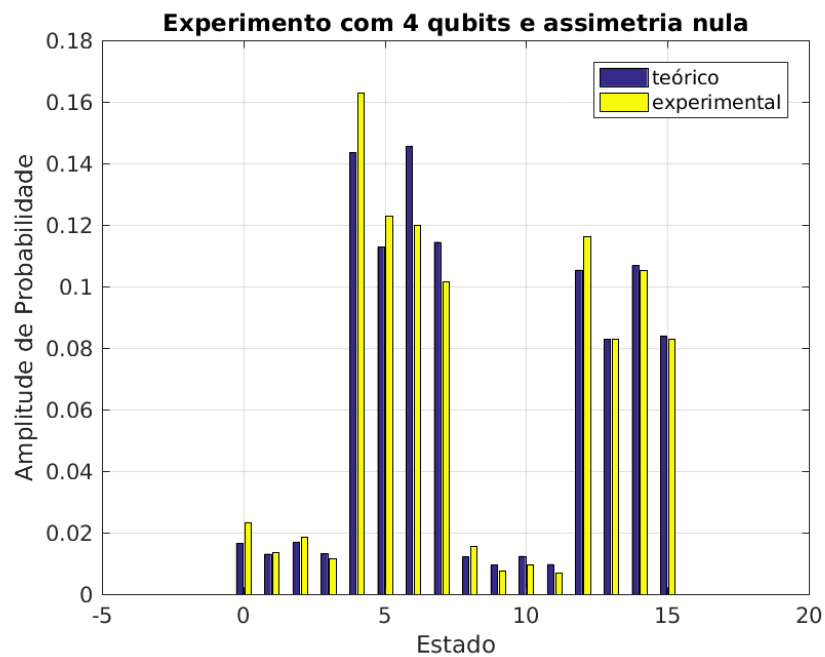


2.10.1 Avaliação de autômatos assimétricos

Aqui foi aplicado um mesmo vetor de entrada a vários autômatos com diferentes assimetrias médias. Os resultados são os seguintes:

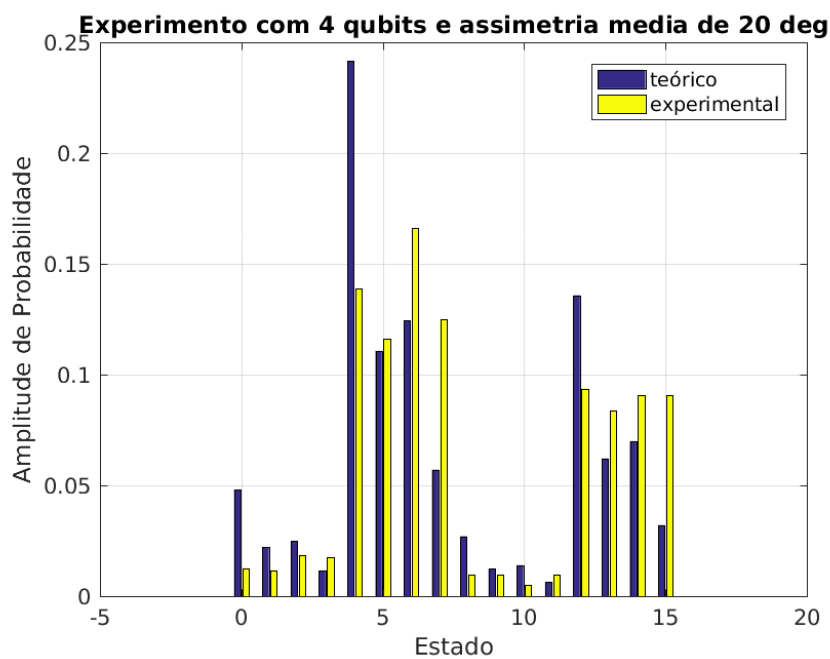
2.10.1.1 Autômato Simétrico

Figura 2.10: 4 qubits, 0 grau



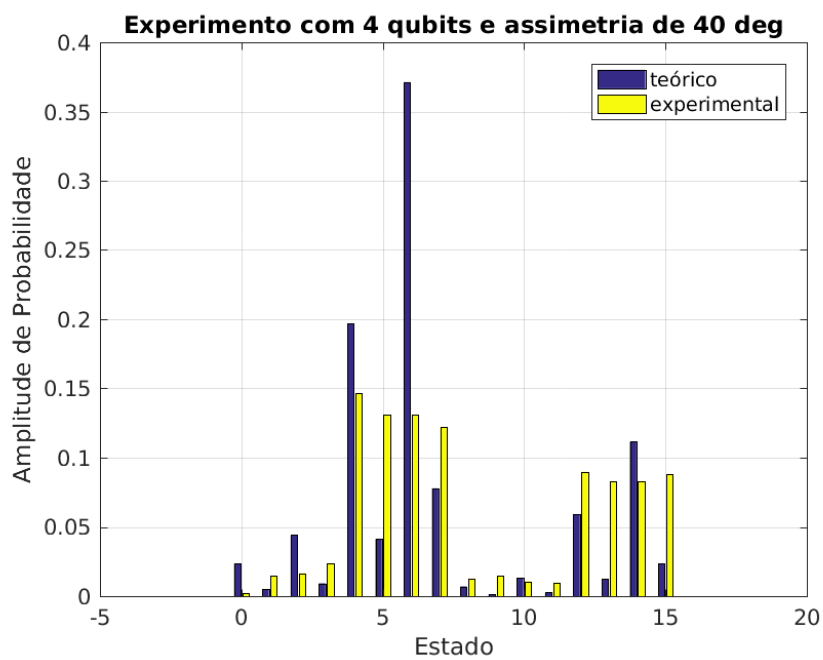
2.10.1.2 Autômato com 20 graus de assimetria média

Figura 2.11: 4 qubits, 20 graus



2.10.1.3 Autômato com 40 graus de assimetria média

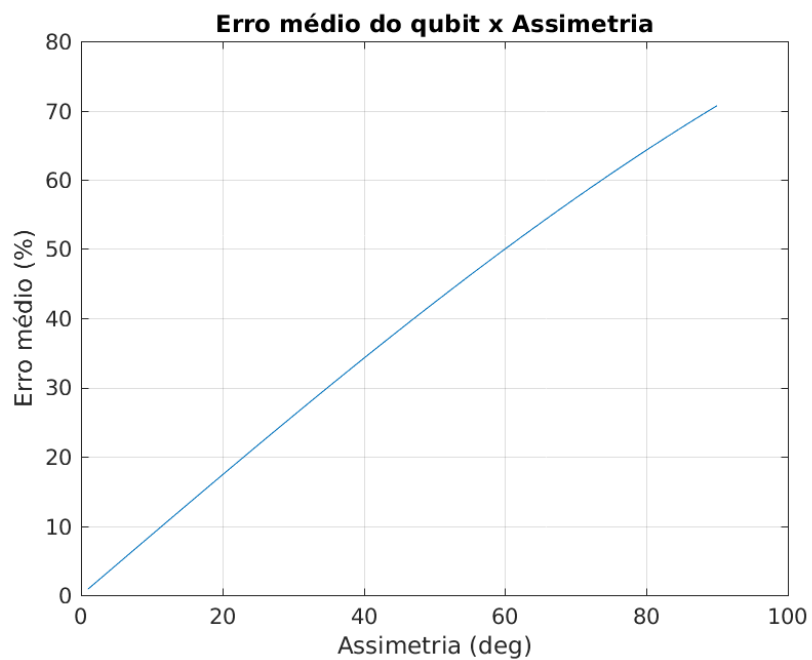
Figura 2.12: 4 qubits, 40 graus



2.10.1.4 Erro médio em função da assimetria

Com a técnica utilizada, obtém-se a seguinte curva para o erro médio em função da assimetria pontual média do autômato:

Figura 2.13: Erro médio



2.11 Discussão

Os experimentos indicam claramente a coerência dos resultados observados com as previsões teóricas. A técnica apresentada resolve o problema da resolução de autômatos probabilísticos com melhora quadrática em relação ao caso clássico, obviamente com precisão comprometida quanto maior for a assimetria do autômato. Para uma série de autômatos probabilísticos assimétricos de grande número de estados e que não exigem elevada precisão, a técnica pode ser uma boa opção de ferramenta de resolução.

Capítulo 3

Conclusões

O processamento quântico está ainda em sua fase inicial no que diz respeito à implementação e aplicações reais, mas já se revela uma ferramenta promissora na resolução de diversos problemas, incluindo o que aqui se discutiu. Neste trabalho mostra-se uma introdução à computação quântica desde o problema da radiação de corpo negro, a partir do qual a mecânica quântica é desenvolvida até se chegar no conceito de estado quântico, que extrapola a definição de estado clássico e consequentemente, as matrizes computacionais clássicas. Foi feita também uma analogia entre a resolução do problema da catástrofe do ultravioleta e o controle de sistemas em tempo discreto.

Foi mostrado como se implementar a resolução do problema da avaliação de autômatos probabilísticos através da plataforma IBM Q experience e os resultados simulados em hardware clássico simulador e hardware quântico propriamente dito, validando o experimento e mostrando o ganho de performance obtido por máquinas quânticas para se calcular autômatos com baixo grau de assimetria.

Para finalizar, ao longo do desenvolvimento do trabalho o autor percebeu algo interessante sobre a implementação física de sistemas computacionais:

“Em um universo onde fosse possível violar o Princípio da Incerteza de Heisenberg ou o Teorema da não-clonagem, um computador quântico seria uma máquina de Turing não-determinística.”

3.1 Perspectivas Futuras

Pode-se dar prosseguimento ao trabalho aumentando o número de estados do autômato e testando o sistemas com autômatos de aplicações reais, comparando por fim a performance da técnica apresentada com os resultados obtidos com máquinas clássicas.

Além da resolução de autômatos probabilísticos, há várias áreas da teoria de controle onde os computadores quânticos podem ser ferramentas de grande valia, como a aceleração de redes neurais e o controle de sistemas quânticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DRESLINSKI, R. G. et al. Near-threshold computing: Reclaiming moore's law through energy efficient integrated circuits. *Proceedings of the IEEE*, v. 98, p. 253–266, jan. 2010.
- [2] ROTTA, D. et al. Quantum information density scaling and qubit operation time constraints of cmos silicon-based quantum computer architectures. *NPJ Quantum Information*, v. 3, p. 26, jun. 2007.
- [3] GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, v. 28, p. 212–219, nov. 1996.
- [4] SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, v. 35, p. 28, ago. 1995.
- [5] KIMBLE, H. J. The quantum internet. *Nature*, v. 453, p. 1023–1030, jun. 2008.
- [6] KATZNELSON, Y. *An Introduction to Harmonic Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- [7] GONDAR, J. L.; CIPOLATTI, R. *Iniciação à Física Matemática*. [S.l.]: IMPA, 2016.
- [8] HOPCROFT, J. E.; MOTWANI, R.; ULLMAN, J. D. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. [S.l.]: Pearson New International, 2013.
- [9] COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Elements of Information Theory*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 2006.
- [10] RAMACHANDRAN, G. N. Vector-matrix representation of boolean algebras and application to extended predicate logic (epl)âpart ii. *Current Science Association*, v. 52, p. 335–341, abr. 1983.
- [11] LONGAIR, M.; ALEXANDER, P. *Statistical and Quantum Physics, Chapter 10*. [S.l.]: Cambridge University, 2005.
- [12] SCHROEDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review*, v. 28, p. 1049–1070, dez. 1926.

- [13] NIELSEN, I. L. C. M. A. *Quantum Computation and Quantum Information*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011.
- [14] LI, C.-K.; ROBERTS, R.; YIN, X. Decomposition of unitary matrices and quantum gates. *International Journal of Quantum Information*, v. 11, p. 8, mar. 2013.

ANEXOS

I. DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DO CD

Descrever CD.

II. PROGRAMAS UTILIZADOS

IBM Q Experience

1. IBM Composer
2. QASM
3. IBM QisKit

Octave